Poštovani natjecatelju iz informatike. ☺
Sakupio sam ti, evo, nekoliko zadataka. Svi se oni rješavaju primjenom dinamičkog programiranja (DP).
Razmisli dobro o svakom zadatku. Rješenje svakog od njih ćeš čuti u subotu na grupi.
Da te podsjetim što je uopće DP...
DP se koristi u problemima optimizacije, tj. traženja optimalnog rješenja. Znači, trebamo naći nešto sa što više ili što manje nečega.
DP se može primjeniti samo onda kada nekakav netrivijalan problem možemo smanjivati sve dok ne dođemo do trivijalnog slučaja koji znamo riješiti, a da riješenje ostane optimalno. To je to ukratko.
Pogledajmo sad pokoji primjer zadatka koji se rješava primjenom DP.

Primjer 1:
Izračunaj n-ti broj iz fibonaccijevog niza { 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... }.

Ovo je najčešći primjer zadatka koji se rješava s DP.
Jednostavno treba reći da:
F[1] = 1
F[2] = 1
F[x] = F[x-2] + F[x-1]

Zašto je ovo dinamičko programiranje? Zato jer i ovdje F[x] računamo pomoću manjih problema F[x-2] + F[x-1]. Znači, moramo redom izračunavati F[x] od 1 do x...

Primjer 2:
Palindrom je riječ koja se jednako čita i sprijeda i straga (kisik, aabcbaa, x, ...). Svaka riječ se može rastaviti na palindrome (banana – b anana, abbabbaab – abba bb aa b, ...). Na koliko se najmanje dijelova mora podijeliti zadana riječ na taj način.

A, ovako nekako moraš riješiti zadatak. Uopće ne trebaš pisati nikakav kod nego samo napisati relaciju kojom ćeš dobiti riješenje.

Neka je string a zadan za rastaviti. Pogledajmo malo koje se sve situacije mogu dogoditi.
Ako je a palindrom (što se lako provjeri) onda je rezultat 1, a ako nije onda riječ možemo podijeliti na dva dijela i za ta dva dijela izračunati optimalan rastav i zbrojit ih. Znači da ovaj problem znamo podijeliti na 2 manja problema, ali istog tipa. Npr. riječ banana možemo rastaviti na ban i ana i onda izračunati optimalan rastav za ban i ana. Još samo treba provjeriti koji od rastava riječi na dvije je najbolji, jer je b i anana bolji od ban i ana.
Neka je opt[i][j] optimalni rastav podstringa stringa a od i-tog slova do j-tog slova.
Npr. opt[2][5] u riječi banana govori koliki je optimalni rastav riječi anan.
Sada možemo konačno uvesti relaciju:
opt[i][j] = 1; ako je podstring string a od i-tog do j-tog slova palindrom
opt[i][j] = min{ opt[i][k] + opt[k+1][j]; i <= k < j }; inače

Ovdje još moraš primjetiti da se ova tablica opt[i][j] mora popunjavati "ukoso", tj. prvo računaš opt[1][1], pa opt[2][2]... opt[n][n], pa opt[1][2], opt[2][3]... opt[n-1][n], opt[1][3]....

To je sve što mi za zadatak trebaš znati. Samo ga moraš znati svesti na manji problem. Tj. moraš naći tu rekurzivnu relaciju kao što je ova gore. Ako ne znaš matematički postaviti relaciju, nema veze. Možeš uvijek riječima sve zapisati ili pseudokodom.

Luka Kalinovčić

1.
Potrebno je napraviti izraz za potenciranje broja a sa operacijama množenja i potenciranja, s tim da operacija množenja košta 1 kunu, a operacija potenciranja na x-tu košta x-1 kuna.
Npr. pogledajmo izraze a^5, (a^2)*(a^3), ((a^2)^2)*a. Svaki od njih je izraz za potenciranje broja a na petu. Prvi košta 4 kune, drugi košta 1+1+2=4 kune, a treći košta 1+1+1=3 kune.
Kolika je minimalna cijena potenciranja broja a na x-tu?

2.
Koliko najmanje brojeva treba izbaciti da bi niz bio rastući?
Primjer:
5 1 2 4 3 6 4 6
Ako se ostavi niz 1 2 4 6 onda smo izbacili 4 broja.
A ako se ostavi niz 1 2 3 4 6 onda smo izbacili 3 broja što je bolje nego 4.

3.
Zadan je niz od 1000 cijelih brojeva. Podijeli niz u grupe od bilo koliko uzastopnih brojeva, tako da je apsolutna suma u grupi sa najvećom apsolutnom sumom bude minimalna.
Primjer:
niz -4 5 -8 8 4 5 -8 2 -5 3 se može podijeliti na (-4 5 -8 8 4 5 -8)(2 -5)(3). Tada su sume u grupama: 2, 3, 3 što znači da je rješenje s ovakvom podjelom 3. Može se i podijeliti ovako:
(-4 5)(-8 8)(4 5 -8)(2 -5 3); tada su sume: 1 0 1 0 i rješenje je 1 što je bolje od onih 3 iz prošlog primjera rastava.
Kolika je minimalna suma u grupi sa najvećom apsolutnom sumom?

4.
Mirko se spušta s (2D) piramide, a na svakoj stepenici nalazi se određen broj novčića. On želi na putu do dolje sakupiti maksimalno novčića. Mirko sa neke stepenice može ići samo dolje lijevo ili dolje desno.
Primjer:
```
    7
   5 6
  1 2 1
 5 1 9 2
6 4 2 1 7
```
Ako se Mirko spusti po brojevima 7 5 2 1 4 zbroj je 19, a po brojevima 7 6 2 9 2, zbroj je 26.

5.
Zadan je matematički izraz koji se sastoji od brojeva, operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Kolika je maksimalna vrijednost izraza kada se zagrade postave optimalno.
Primjer:
4+5*8-2*7
Ako se zagrade postave ovako: ((4+(5*8))-2)*7 rezultat je 294,
a ako se postave ovako: ((4+5)*(8-2))*7 rezultat je 378.

6.
Čokolada se sastoji kvadratića u n redaka i m stupaca. Mirko može čokoladu presjeći (ne nužno popola) između nekog redka ili stupca. Znači, on može čokoladu od 3*7 prepoloviti u jednu od 3*3 i jednu od 3*4. Ili čokoladu od 6*7 u jednu od 2*7 i jednu od 5*7. Mirko želi imati samo kvadratne čokolade.
Koliki je minimalan broj presjecanja čokolade da bi svi djelovi bili kvadrati?
Primjer:
Čokolada 6*9, se može prepoloviti na 6*6 i 6*3, a 6*3 na 3*3 i 3*3. Dakle za čokoladu 6*9 su potrebna 2 presjecanja.

7.
Zadan je neki izraz koji se sastoji od znakova ‘(‘, ‘[‘, ‘{‘, ‘}’, ‘]’ i ‘)’. Izraz je regularan ako svaka otvorena zagrada ima odgovarajuću zatvorenu zagradu tako da je izraz unutar njih također regularan. Npr. izrazi []({}), [{()}[]]{} i {}{{}} su regularni, a izrazi {[]), [{]} i {}{][()] nisu.
Koliko je najmanje zagrada potrebno dodati da bi izraz postao regularan?
Primjer:
{[{](])
Izraz se može proširiti ovako: {}[]{}[]()[]()
Ali je bolje ovako jer je manje znakova dodano: {[{}]}([])

8.
Zadana je neka riječ a i riječ b. Na riječi a se mogu raditi neke od slijedećih transformacija:
1 - Dodavanje bilo kojeg slova na bilo koje mjesto (banana --- bagnana)
2 - Promjena bilo kojeg slova u riječi u bilo koje drugo slovo (banana --- binana)
3 - Brisanje bilo kojeg slova u riječi (banana --- banaa)
4 - Brisanje prvih bilo koliko slova u riječi (banana --- nana)
Koliki je minimalni broj transformacija da se iz riječi a dobije riječ b?
Primjer:
BANANA
NANA – (4. transformacija)
MANA – (2. transformacija)
MAMA – (2. transformacija)
MAMAC – (1. transformacija)

9.
Na koliko načina skakač (iz šaha) može doći s polja (sx, sy) na polje (ex, ey) u točno k koraka?
Ploča je velika 100*100, a k <= 100.
Primjer:
s polja (5, 5) na polje (9, 5) u dva koraka skakač može doći na 2 načina. Prvi je (5,5)-(7,6)-(9,5), a drugi (5,5)-(7,4)-(9,5).

10.
Koliko je dugačak najduži podniz ne nužno uzastopnih elemenata niza, takav da je razlika svaka dva susjedna elementa jednaka?
Primjer:
1 2 6 4 3 1 5 7 9 6
Rješenje je 5 – 1 3 5 7 9 – razlika svaka dva susjedna je 2.

11.
Zadane su dva stringa, svaki od stringa možemo proširivati dodavanjem znaka SPACE na bilo koje mjesto i to bilo koliko puta. Tako, npr., string “BATINA” možemo proširiti u “_BA___TI_N_A”.
Da bi se izračunala udaljenost dvaju stringa oni moraju biti iste dužine. Udaljenost se računa kao suma udaljenosti znakova na istim pozicijama i to tako da je udaljenost SPACEa i bilo kojeg znaka zadana brojem X, a udaljenost bilo koja dva znaka jednaka apsolutnoj razlici njihovih ASCII vrijednosti.
Kolika je minimalna udaljenost proširenja stringova a i b?
Primjer:
a = MJ
b = JAO
X = 4
Rezultat je 12, a proširenja su:
```
MJ__
_JAO
```

12.
Da bi se pomnožile dvije matrice broj stupaca prve matrice mora biti jednak broju redaka druge matrice. Zato se matrica A sa dimenzijama a*b i matrica B sa dimenzijama b*c mogu množiti. Rezultat množenja je matrica C dimenzija a*c.
Za standardno množenje matrica potrebno je a*b*c operacija.
Koliki je minimalan broj operacija da se ulančano pomnoži n matrica?
Primjer:
A(5,3)
B(3,7)
C(7,2)
D(2,5)
Ako se zagrade postave ovako (A*B)*(C*D) broj množenja je 5*3*7+5*2*5+5*7*5=330
Ako se zagrade postave ovako (((A*B)*C)*D) broj množenja je 5*3*7+5*7*2+5*2*5=225

13.
Dva igrača igraju šah. Vjerojatnost da će prvi pobjediti je A, a da će drugi pobjediti B. Kolika je vjerojatnost da će prvi igrač imati x pobjeda, drugi igrač y pobjeda nakon x+y partija šaha?

14.
Tri igrača kartaju belu. Vjerojatnost da će prvi pobjediti je A, da će drugi pobjediti B, a da će treći pobjediti C. Kolika je vjerojatnost da će prvi igrač imati x pobjeda, drugi igrač y pobjeda, a treći igrač z pobjeda nakon x+y+z partija bele?

15.
Počinjemo sa jednim (bilo kojim) velikim slovom i proširujemo ga prema nizu pravila. Velika slova možemo proširivati prema pravilima u neka dva (mala ili velika) slova. Za zadani niz pravila proširenja velikih slova i string malih slova X potrebno je odrediti koja se velika slova mogu prema pravilima proširiti u string X. (pogledaj primjer za detalje)
Primjer:
Zadan je niz pravila:
A:at – slovo A se može proširiti u at.
A:Dz – slovo A može proširiti u Dz
D:AA – slovo D se može proširiti u AA
C:bA – slovo C se može proširiti u bA

Koja slova možemo odabrati za početno da bi se dobio string atatatzz?
Samo iz A se može dobiti atatatzz i to ovako:
A – Dz – AAz – atDzz – atAAzz – atatatzz

Rješenje je A.

16.
Potrebno je pofarbati 10000 frizbija u jednu od četiri boje A, B, C ili D. Frizbiji se nalaze na pokretnoj traci i ne mogu mijenjati redoslijed, a svaki frizbi ima unaprijed određenu boju u koju se mora pofarbati. Robot koji farba ima dva spremnika za boje i prima frizbije jedan po jedan. Ako se na robotu nalazi boja u koju se frizbi mora obojati on oboja frizbi i to bojanje traje jednu minutu, a ako se ne nalazi, radnici zaustavljaju traku i skidaju jedan od spremnika i stavljaju spremnik s traženom bojom. Za skidanje pojedinog spremnika potrebno je Ax, Bx, Cx, Dx vremena, a za stavljanje Ay, By, Cy, Dy vremena. Na početku su na robotu montirani spremnici A i B.
Odredi minimalno vrijeme potrebno za bojanje svih frizbija.